TD$_2$ – Polynômes, Analyse asymptotique

Exercice 1 ★

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par le polynôme $(X-a)(X-b)$. On commencera par le cas où $a \neq b$.

Exercice 2 ★★

Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient :

a) $P(X+1) = P(X)$ b) $(X+1)P(X) = (X-2)P(X+1)$.

Exercice 3 ★★★★

Déterminer les entiers $n > 1$ pour lesquels le polynôme $P = (X-1)^n - (X^n - 1)$ admet une racine de multiplicité au moins 2.

Exercice 4 Polynômes de Tchebychev de première espèce ★★

On définit la suite de polynômes de Tchebychev par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$$

1. (a) Expliciter T_2 et T_3
   (b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de T_n et son coefficient dominant.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, T_1, \cdots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos(x)\cos((n+1)x)$$

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

Exercice 5 ★★

On pose $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

1. Étudier f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur un intervalle à déterminer, et que la réciproque notée f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Montrer que f^{-1} admet un développement limité en 0 à tout ordre, préciser celui à l'ordre 3 si possible.

Exercice 6 ★★

En exploitant des formules de Taylor, montrer les inégalité suivantes :

1. Pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \sqrt[3]{1+x} - 1 - \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{9} \leqslant \dfrac{5x^3}{81}$.
2. Pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\cos(x+h) - \cos x + h\sin x + \dfrac{h^2}{2}\cos x\right| \leqslant \dfrac{|h|^3}{6}$.

Exercice 7 ★★

En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que les suites suivantes convergent et déterminer leurs limites :

$$a)\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \quad ; \quad b)\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{k-2}}{k!}.$$

Exercice 8 ★★

Déterminer les DL suivants :

a) $\dfrac{\tan x - x}{x^3}$ en 0 à l'ordre 2

b) $\dfrac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \sin x}$ en 0 à l'ordre 2

c) $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}$ en $+\infty$ à l'ordre 2

d) $\ln(1+\cos x)$ en 0 à l'ordre 4

e) $\tan(x)$ en $\dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 3

f) $\sin\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right)\dfrac{\sin\theta}{1+2\cos\theta}$ en $\dfrac{2\pi}{3}$ à l'ordre 1

Exercice 9 ★★

On pose, pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$. Montrer que l'on peut prolonger f en 0 en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 10 ★★★

Effectuer l'étude complète de chacune des fonctions suivantes (en particulier : asymptotes, prolongements éventuels et variations). Tracer l'allure de la courbe.

$$a)\ f(x) = \frac{x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1} \quad b)\ f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \quad c)\ f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Exercice 11 ★★★★

Soit $\lambda \in]0,1[$ donné. Soit $f_n(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$ et $f(x) = \mathrm{e}^x$.

1. Déterminer, sur $\mathbb{R}$, la position du graphe de f_n par rapport à celui de f.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$.
3. Prouver l'existence et l'unicité de la racine positive x_n de l'équation $f_n(x) = \lambda f(x)$. Montrer que la suite (x_n) admet une limite qu'on déterminera.

Exercice 12 ★★★★

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, 2f(x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$. Conclure.
3. Etudier la réciproque.

Exercice 13 ★★★★

Déterminer toutes les fonctions f, dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs réelles telles que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. *On pourra montrer que, si f est solution, alors f vérifie une équation différentielle du second ordre que l'on intégrera en posant $t = \ln(x)$.*

Exercices issus d'oraux

Exercice 14 ★★

(*Oral 2013, 2018*)

Soit f définie par $f(x) = x\ln(5+\sin(x))$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Justifier que f est bien définie et $\mathcal{C}^1$. Calculer $f'(x)$.
2. Encadrer $g(x) = \ln(5+\sin(x))$ et $h(x) = \dfrac{1}{5+\sin(x)}$. En déduire les variations de f.
3. Montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
4. Écrire un développement limité de f à l'ordre 4 en 0 et en déduire la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f en $(0, f(0))$ ainsi que la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.

Exercice 15 ★★★★

(*Oral 2013*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + x^2 - 3x^3$.

1. Déterminer le plus grand intervalle I contenant 0 sur lequel f est bijective.
2. On appelle g la fonction réciproque de f sur I. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de g.

Exercice 16 ★★★★★

(*Oral 2012,2013*)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X) \times P(X+1)$.

Exercice 17 ★★★

(*Oral 2018*)

Soit n un entier naturel impair, on considère $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(E) : (X^n + 1)P(X) = P(X^2)$

1. Montrer que le polynôme $X^n - 1$ vérifie la relation (E).
2. Déterminer le degré du polynôme P.
3. Notons ω une racine n-ième de -1, montrer que $-\omega$ est racine de P.
4. Quels sont tous les polynômes vérifiant l'équation (E) ?

Exercice 18 ★★

(*Oral 2021*)

$$\text{Soit } f(t) = \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement positive.
2. Étudier la monotonie de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. On a $\deg((X-a)(X-b)) = 2$, donc d'après le théorème de la division euclidienne il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R de degré strictement inférieur à 2 tel que $P = (X-a)(X-b)Q + R$.

Ainsi
$$\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \qquad P = (X-a)(X-b)Q + \alpha X + \beta$$

— On suppose $a \neq b$. On a alors $P(a) = \alpha a + \beta$ et $P(b) = \alpha b + \beta$.
  On en déduit, en soustrayant, que $\alpha = \dfrac{P(a) - P(b)}{a-b}$, puis $\beta = \dfrac{P(b)a - P(a)b}{a-b}$
  Donc $R = \dfrac{P(a) - P(b)}{a-b} X + \dfrac{P(b)a - P(a)b}{a-b}$.
— On suppose maintenant que $a = b$. On a toujours $P(a) = \alpha a + \beta$.
  De plus $P' = (X-a)^2 Q' + 2(X-a)Q + \alpha$.
  D'où $\alpha = P'(a)$, $\beta = P(a) - aP'(a)$ et donc $R = P'(a)X + P(a) - aP'(a)$

Corrigé de l'exercice 2

a) On va procéder par analyse-synthèse.

Analyse :

Soit P tel que $P(X+1) = P(X)$.

On montre aisément par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n) = P(0)$.

Le polynôme $P - P(0)$ a alors une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

Ainsi P est constant.

Synthèse :

Si P est constant, P vérifie bien l'égalité.

Ainsi les polynômes solutions sont exactement les polynômes constants.

b) On va procéder là encore par analyse-synthèse.

Analyse :

soit P un polynôme tel que $(X+1)P(X) = (X-2)P(X+1)$

Si on applique l'égalité pour $X = 2$, on obtient $3P(2) = 0$, donc 2 est racine de P.

Si on applique l'égalité pour $X = 1$, on obtient $2P(1) = -P(2) = 0$, donc 1 est racine de P.

Si on applique l'égalité pour $X = 0$, on obtient $P(0) = -2P(1) = 0$, donc 0 est racine de P.

Ainsi P est de la forme $X(X-1)(X-2)Q(X)$. On injecte dans l'équation, ce qui donne

$$(X+1)X(X-1)(X-2)Q(X) = (X-2)(X+1)X(X-1)Q(X+1)$$

Par unicité du quotient d'une division euclidienne, on en déduit que $Q(X) = Q(X+1)$, donc par la question précédente, Q est constant.

Synthèse :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $P = cX(X-1)(X-2)$, on a bien $(X+1)P(X) = (X-2)P(X+1)$.

On en déduit que les polynômes solutions sont exactement les polynômes $P(X) = cX(X-1)(X-2)$, où $c \in \mathbb{C}$.

Corrigé de l'exercice 3

Soit $P = (X-1)^n - (X^n - 1)$. P admet une racine double si et seulement si P et P' ont une racine commune.

On a $P' = n(X-1)^{n-1} - nX^{n-1}$. Ainsi r est une racine de P' si et seulement si $(r-1)^{n-1} = r^{n-1}$.

On cherche ainsi les complexes r tels que $\begin{cases} (r-1)^n & = r^n - 1 \\ (r-1)^{n-1} & = r^{n-1} \end{cases}$.

1 n'est alors pas une racine de P' d'où, en multipliant la seconde égalité par $r-1$, r est une racine de P et P' si et seulement si $\begin{cases} (r-1)^n & = r^n - 1 \\ (r-1)^n & = r^n - r^{n-1} \end{cases}$

Ceci est équivalent à $\begin{cases} (r-1)^n & = r-1 \\ r^{n-1} & = 1 \end{cases}$ et donc à $\begin{cases} (r-1)^{n-1} & = 1 \\ r^{n-1} & = 1 \end{cases}$

Ainsi r est une racine commune de P et P' si et seulement si r est une racine $(n-1)$-ème de l'unité et $r-1$ également.

Soit $r = e^{i\frac{2k\pi}{n-1}}$, alors $r - 1 = 2ie^{i\frac{k\pi}{n-1}} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)$.

Si $r-1$ est une racine $(n-1)$-ème de l'unité, alors $|r-1| = 1$, donc $\left|\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)\right| = \dfrac{1}{2}$ d'où $\dfrac{k\pi}{n-1} = \pm\dfrac{\pi}{6} + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Finalement, si $r-1$ est une racine $(n-1)$-ème de l'unité, alors il existe $(k, m) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $n - 1 = \pm 6k - 6m(n-1)$.

Comme $n \in \mathbb{N}$ on en déduit qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6p + 1$.

On a ainsi montré que, si P admet une racine double, alors n est de la forme $6p+1$, $p \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, si $n = 6p+1$, prenons $r = e^{i\frac{2p\pi}{n-1}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors

$$\begin{aligned} P\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) &= \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)^{6p+1} - \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{6p+1} + 1 \\ &= \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{6p+1} - \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{6p+1} + 1 \\ &= e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et
$$P'\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = n\left(\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)^{6p} - \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{6p}\right) = n\left(\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{6p} - \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{6p}\right) = 0$$

Finalement P admet une racine de multiplicité au moins 2 si et seulement si n est de la forme $6p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 4

1. (a) On a
$$T_2 = 2X^2 - 1 \qquad \text{et} \qquad T_3 = 4X^3 - 3X$$

   (b) On va montrer par une récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^{n-1}

   Initialisation :

   On voit, d'après la question précédente, que, pour $n \in \{1, 2, 3\}$, T_n est bien de degré n

   Hérédité :

   Soit $n \geqslant 2$. On suppose que T_n est de degré n de monôme dominant $2^{n-1}X^n$ et que T_{n-1} est de degré $n-1$.

   Ainsi T_n peut s'écrire $T_n = 2^{n-1}X^n + Q_n(X)$ où Q_n est de degré inférieur ou égal à $n-1$.

   On a alors
$$T_{n+1} = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) = 2^n X^{n+1} + 2XQ_n - T_{n-1}$$

$2XQ_n(X) - T_{n-1}(X)$ est une somme de polynômes de degré inférieurs ou égaux à n, son degré est donc inférieur ou égal à n.

On a donc écrit T_{n+1} sous la forme d'un monôme de degré $n+1$ $2^n X^{n+1}$ plus un polynôme de degré strictement plus petit que $n+1$. Son degré est alors $n+1$ et son coefficient dominant est 2^n.

On a ainsi prouvé par récurrence que, pour tout entier n, T_n est un polynôme de degré n.

(c) On vient de prouver que, pour $k \in \mathbb{N}$, T_k est de degré k. Ainsi la famille $(T_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille de polynômes de degrés deux-à-deux distincts de $\mathbb{R}_n[X]$, elle est donc libre. Il s'agit d'une famille libre de cardinal $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\cos((n+1)x)\cos(x) = \frac{1}{2}(\cos((n+1)x + x) + \cos((n+1)x - x))$$

C'est-à-dire

$$\cos((n+1)x)\cos(x) = \frac{1}{2}(\cos((n+2)x) + \cos(nx)$$

ou encore

$$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos(x)\cos((n+1)x)$$

Remarquons que, si $n \in \mathbb{N}^*$, alors, en appliquant cette relation à $n-1$ on obtient

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(x)\cos(nx)$$

(b) On va procéder par récurrence double sur n

Initialisation :

pour $n=0$ et $n=1$ on a, de manière évidente

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout réel x, on a

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx) \quad \text{et} \quad T_{n-1}(\cos(x)) = \cos((n-1)x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos(x)) &= 2\cos(x)T_n(\cos(x)) - T_{n-1}(\cos(x)) \\ &= 2\cos(x)\cos(nx) - \cos((n-1)x) \\ &= \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) - \cos((n-1)x) \\ &= \cos((n+1)x) \end{aligned}$$

On a ainsi montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

Corrigé de l'exercice 5

1. f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. On a

$$\forall x > -1, \qquad f'(x) = \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

Ainsi f est strictement croissante sur $]-1, \mathrm{e}-1]$ puis strictement décroissante sur $[e-1,+\infty[$

On a $\lim\limits_{x\to -1^*} \ln(1+x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} 1+x = 0^+$, ainsi $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$. Par croissance comparée $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

On en déduit le tableau de variations

x	-1		$e-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

2. Comme $\mathrm{e}-1>1$, f est strictement croissante sur l'intervalle $]-1,1[$ et y est continue.D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $]-1,1[$ vers $f(]-1,1[) = \left]-\infty, \dfrac{\ln 2}{2}\right[$.

   On constate que f' ne s'annule jamais sur $]-1,1[$, donc f^{-1} est dérivable sur $\left]-\infty, \dfrac{\ln 2}{2}\right[$, et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \quad (*)$$

   On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$

   <u>Initialisation :</u>

   C'est vrai pour $n=1$: f^{-1} est dérivable ; d'après $(*)$ sa dérivée est continue, par quotient et composition, puisque f' et f^{-1} sont continues.

   <u>Hérédité :</u>

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$.

   On sait que f' est aussi de classe $\mathcal{C}^n$, donc d'après $(*)$, par quotient et composition, $\left(f^{-1}\right)'$ est également de classe $\mathcal{C}^n$, c'est-à-dire f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

   Finalement f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3. f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, donc, d'après le théorème de Taylor-Young, f^{-1} admet un développement limité en 0 à tout ordre.

   Ainsi il existe $(a_0,a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$f^{-1}(y) \underset{y\to 0}{=} a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + o(y^3)$$

   On sait que $f(0)=0$, d'où $a_0 = f^{-1}(0) = 0$.

   On calcule le développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)$$

   Or $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, donc, par composition de D.L.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)) &\underset{x\to 0}{=} a_1\left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)\right) + a_2\left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 \\
&\quad + a_3\left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} a_1 x - \frac{3a_1}{2}x^2 + \frac{11a_1}{6}x^3 + a_2x^2 - 3a_2x^3 + a_3x^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} a_1 x + \left(-\frac{3a_1}{2} + a_2\right)x^2 + \left(\frac{11a_1}{6} - 3a_2 + a_3\right)x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Or $f^{-1}(f(x)) = x \underset{x\to 0}{=} x + o(x^3)$. D'où par unicité des coefficients d'un développement limité

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ -\dfrac{3a_1}{2} + a_2 & = 0 \\ \dfrac{11a_1}{6} - 3a_2 + a_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 & = 1 \\ a_2 & = \dfrac{3}{2} \\ a_3 & = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Ainsi

$$f^{-1}(y) \underset{y\to 0}{=} y + \frac{3}{2}y^2 + \frac{8}{3}y^3 + o(y^3)$$

Corrigé de l'exercice 6

1. Soit $x \geqslant 0$, On va appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à $f : t \longmapsto (1+t)^{\frac{1}{3}}$ entre 0 et x, à l'ordre 2, ce qui est possible car f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, x]$.

   Pour $t \in [0, x]$ on a
   $$f^{(3)}(t) = \frac{10}{27}(1+t)^{-\frac{8}{3}}$$
   Ainsi
   $$\forall t \in [0, x], \qquad 0 < \frac{10}{27}(1+t)^{-\frac{8}{3}} \leqslant \frac{10}{27}$$
   La formule de Taylor avec reste intégral nous donne
   $$f(x) - 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\frac{10}{27}(1+t)^{-\frac{8}{3}}\,\mathrm{d}t$$
   Or
   $$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\frac{10}{27}(1+t)^{-\frac{8}{3}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\frac{10}{27}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{5}{27}\left[-\frac{(x-t)^3}{3}\right]_0^x \leqslant \frac{5x^3}{81}$$
   On a donc bien
   $$\forall x \geqslant, \qquad 0 \leqslant \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} \leqslant \frac{5x^3}{81}$$

Égalité de Taylor-Lagrange

Un élève savant serait tenté d'utiliser ici l'égalité de Taylor-Lagrange puis d'utiliser l'encadrement de $f^{(3)}$. On rappelle que l'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme en filière PT.

2. Soient x et h des réels, on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ à cos, qui est bien de classe $\mathcal{C}^3$

   On a
   $$\left|\cos(x+h) - \cos(x) + h\sin(x) + \frac{h^2}{2}\cos(x)\right| \leqslant \frac{x^3}{6}\sup_{t\in[x,x+h]}|\sin(x)|$$
   D'où, puisque $\sin(t)| \leqslant 1$,
   $$\forall (x,h) \in \mathbb{R}, \qquad \left|\cos(x+h) - \cos(x) + h\sin(x) + \frac{h^2}{2}\cos(x)\right| \leqslant \frac{x^3}{6}$$

Corrigé de l'exercice 7

a) On va appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange au rang $n+1$ entre 0 et 1 à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$. Cela nous donne
$$\left|f(1) - \sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k\right| \leqslant \frac{(1-0)^{n+2}}{(n+2)!}\sup_{x\in[0,1]}|f^{(n+2)}(x)|$$
Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+1)^k}$, ainsi
$$\sup_{x\in[0,1]}\left|f^{(n+2)}(x)\right| = \sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}\right| = (n+1)!$$

Ce qui nous donne dans l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\left|\ln(2) - \ln(1) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}\right| \leqslant \frac{(n+1)!}{(n+2)!}$$

Ou encore

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{(n+2)}$$

Un simple décalage d'indice nous donne

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k+1}\right| \leqslant \frac{1}{(n+2)}$$

Finalement, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+2)} = 0$ on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$

b) On va appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange au rang $n+1$ entre 0 et 3 à la fonction $x \mapsto \exp(x)$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Cela nous donne

$$\left|f(3) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(3-0)^k\right| \leqslant \frac{(3-0)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in[0,3]} |f^{(n+1)}(x)|$$

D'où

$$\left|\mathrm{e}^3 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}3^k\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^3}{(n+1)!}$$

Ainsi, en divisant par 9,

$$\left|\frac{\mathrm{e}^3}{9} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}3^{k-2}\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^3}{9(n+1)!}$$

Finalement, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^3}{9(n+1)!} = 0$ on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(3^{k-2}}{k!} = \frac{\mathrm{e}^3}{9}$

Corrigé de l'exercice 8

a) On calcule d'abord le DL en 0 de tan à l'ordre 5.

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&\underset{x\to0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} \\
&\underset{x\to0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4} + o(x^5)\right) \\
&\underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} - \frac{x^5}{4!} + \frac{x^5}{4} + o(x^5) \\
&\underset{x\to0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{16x^5}{120} + o(x^5) \\
&\underset{x\to0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$f(x) \underset{x\to0}{=} \frac{1}{3} + \frac{2x^2}{15} + o(x^2)$$

b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \sin x} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)}{\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2x^3}{6} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)} \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1 - \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)}{1 + \dfrac{2x}{3} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)} \\
&\underset{x\to 0}{=} -\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{12} + \frac{4x^2}{9} + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\left(1 - \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^2}{12} + \frac{4x^2}{9} + o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + \frac{2x}{3} - \frac{5x^2}{18} + o(x^2)$$

c) On a

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}} = \sqrt{1 + \frac{x}{1 + x^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

Méthode

On pourrait aussi définir $g : y \mapsto f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ et déterminer le D.L. de g en 0^+ puis substituer y par $\dfrac{1}{x}$ dans le résultat final.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, on peut donc utiliser le D.L. de $\dfrac{1}{1+u}$ au voisinage de 0, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{1 + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d)

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \ln(2) - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \tan\left(\frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{1+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\\
&\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \frac{1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)}{1-\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)\right)}\\
&\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)\right)\times\\
&\qquad \left(1+\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3}\right)+\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3}\right)^2+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)\\
&\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} 1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\tan(x) = 1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

f) On pose $h = \theta - \dfrac{2\pi}{3}$ et on va étudier $g(h) = \sin(h)\dfrac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}+h\right)}{1+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+h\right)}$ pour $h \to 0$.

On a

$$\begin{aligned}
g(h) &= \sin(h)\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}+h\right)}{1+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+h\right)}\\
&= \sin(h)\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(h)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(h)}{1+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(h)-2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(h)}\\
&= \frac{1}{2}\sin(h)\frac{\sqrt{3}\cos(h)-\sin(h)}{1-\cos(h)-\sqrt{3}\sin(h)}\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}(h+o(h))\frac{\sqrt{3}-h+o(h)}{1-1-\sqrt{3}h+o(h)}\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}(h+o(h^2))\frac{\sqrt{3}-h+o(h)}{1-1-\sqrt{3}h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)}\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}(1+o(h))\frac{\sqrt{3}-h+o(h)}{-\sqrt{3}+\frac{h}{2}+o(h)}\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}(1+o(h))(\sqrt{3}-h+o(h))\frac{-1}{\sqrt{3}}\frac{1}{1-\frac{h}{2\sqrt{3}}+o(h)}\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}(1+o(h))(\sqrt{3}-h+o(h))\frac{-1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{h}{2\sqrt{3}}+o(h)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} -\frac{1}{2}+\frac{h}{4\sqrt{3}}+o(h)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(\theta) \underset{x\to\frac{2\pi}{3}}{=} -\frac{1}{2}+\frac{\theta-\frac{2\pi}{3}}{4\sqrt{3}}+o\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$$

Corrigé de l'exercice 9

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right[$ et sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On montre d'abord que f est prolongeable par continuité en 0, pour cela on fait un DL à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}-\frac{1}{x}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}-1\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)-1\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{6}+o(x)
\end{aligned}$$

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$. De plus, comme f admet un D.L. à l'ordre 1 alors f est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{6}$.

Attention, ça ne suffit pas, il faut en plus que f' soit continue en 0.

Pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ on a

$$f'(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2\cos(x)+\sin(x)^2}{x^2\sin(x)^2}$$

Or

$$\begin{aligned}
-x^2\cos(x)+\sin(x)^2 &= -x^2\cos(x)+\frac{1-\cos(2x)}{2}\\
&\underset{x\to 0}{=} -x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{4x^2}{2}-\frac{16x^4}{24}+o(x^4)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} -x^2+\frac{x^4}{2}+x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{6}+o(x^4)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f'(x) = \frac{-x^2\cos(x)+\sin(x)^2}{x^2\sin(x)^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^4}{6}}{x^4} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{6}$$

On a donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{6} = f'(0)$. f' est bien continue en 0, elle l'était ailleurs donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Remarque

On aurait aussi pu utiliser ici le théorème de la limite de la dérivée.

Corrigé de l'exercice 10

a) f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, elle est de plus impaire, il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x>0$ on a

$$f'(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)(\mathrm{sh}(x)-x)}{(\mathrm{ch}(x)-1)^2}$$

Or, la fonction sh est positive sur $\mathbb{R}_+$ et, pour $x>0$ on a $\mathrm{sh}(x)>x$ (il suffit d'étudier $x\mapsto \mathrm{sh}(x)-x$ sur $\mathbb{R}_+^*$). Ainsi la dérivée de f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, f est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Par imparité f est aussi strictement croissante sur $]-\infty,0[$.

Étudions maintenant les points particuliers et asymptotes éventuelles

— En 0, $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{2}{3}x+o(x)$. f donc est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0)=0$ et le prolongement est dérivable en 0 avec $g'(0)=\frac{2}{3}$.

Si on pousse plus loin le DL on obtient $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{2}{3}x+\frac{1}{90}x^3+o(x^3)$, il y a donc un point d'inflexion en 0.

— Remarquons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1} = x + \frac{x - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1}$$

En $+\infty$, $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x\,\mathrm{ch}\,x)$ car $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$.

Ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{xe^x/2}{e^x/2} = x$.

On a ensuite $f(x) - x = \dfrac{x - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1} \underset{x\to+\infty}{\to} -1$. Ceci montre que la courbe de f admet la droite d'équation $y = x - 1$ comme asymptote oblique en $+\infty$.

On obtient la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette droite en étudiant le signe de $f(x) - x + 1 = \dfrac{x + e^{-x} - 1}{\mathrm{ch}\,x - 1}$. Cette quantité est positive pour x assez grand, donc $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de son asymptote en $+\infty$.

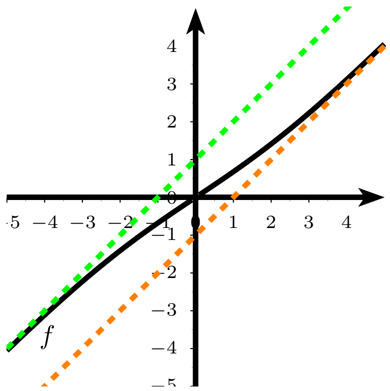
— En $-\infty$, on a $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x\,\mathrm{ch}(x))$ car $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\mathrm{ch}(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{-e^x}{2}$.

Ainsi $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{xe^x/2}{e^x/2} = x$.

On a ensuite $f(x) - x = \dfrac{x - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1} \underset{x\to-\infty}{\sim} 1$, ce qui montre que que la courbe de f admet la droite d'équation $y = x - 1$ comme asymptote oblique en $-\infty$.

On obtient la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette droite en étudiant le signe de $f(x) - x - 1 = \dfrac{x + e^{-x} + 1}{\mathrm{ch}(x) - 1}$. Cette quantité est négative pour x assez petit, donc $\mathscr{C}_g$ est en dessous de son asymptote en $-\infty$.

Figure .1 – Tracé de f et de ses asymptotes (en pointillés)



b) La fonction est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Il y a donc des études locales à faire en 0 et en $\pm\infty$.

Pour $x \neq 0$ on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(\mathrm{e}^x - 1)}$ où $g(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + 1$. Comme $x(\mathrm{e}^x - 1) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$, le signe de f est donc le même que le signe de g.

Étudions la fonction g ; g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$$

On en déduit le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi g est positive et donc f' est positive. Par suite f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et $sur]0, +\infty[$.

— On a

$$\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)$$

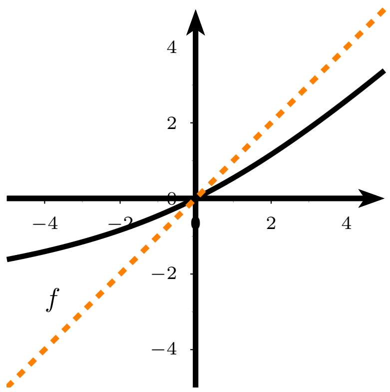
Donc f se prolonge en fonction dérivable en 0 par $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

— En $+\infty$ on a $\ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) = x - \ln x + \ln(1 - e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$

Comme de plus $\ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ alors f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.

— En $-\infty$ on a $\ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) \underset{x\to-\infty}{=} -\ln(|x|) + o(1)$; f tend donc vers $-\infty$ en $-\infty$ et admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.

Figure .2 – Tracé de $\mathscr{C}_f$ et de la direction asymptotique $y = x$



c) La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine : il y a des études locales à effectuer en 1 et en $\pm\infty$.

— Soit $g : y \mapsto f\left(\dfrac{1}{y}\right)$. Pour $y \in \mathbb{R}^*$ on a

$$g(y) = \frac{1}{y}\arctan\left(\frac{1}{1-y}\right) \underset{y\to 0}{=} \frac{1}{y}\arctan\left(1 + y + y^2 + o(y^2)\right)$$

Or, la formule de Taylor-Young nous donne

$$\begin{aligned}\arctan(x) &\underset{x\to 1}{=} \arctan(1) + \arctan'(1)(x-1) + \frac{\arctan''(1)}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)\\ &\underset{x\to 1}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^2)\end{aligned}$$

Taylor-Young

Les dérivées de la fonction arctan sont suffisamment simples pour qu'il soit raisonnable d'utiliser Taylor-Young

Ainsi

$$\begin{aligned}
g(y) &\underset{y\to 0}{=} \frac{1}{y}\arctan\left(1+y+y^2+o(y^2)\right)\\
&\underset{y\to 0}{=} \frac{1}{y}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(y+y^2)-\frac{1}{4}(y+y^2)^2+o(y^2)\right)\\
&\underset{y\to 0}{=} \frac{1}{y}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}y^2+o(y^2)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} \frac{\pi}{4}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ceci nous montre que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet comme asymptote en $+\infty$ et $-\infty$ la droite d'équation $y=\frac{\pi}{4}x+\frac{1}{2}$ et qu'elle est au dessus de son asymptote en $+\infty$ et en dessous de son asymptote en $-\infty$.

— Pour $h>0$ on a

$$\begin{aligned}
f(1+h) &= (1+h)\arctan\left(\frac{h+1}{h}\right)\\
&= (1+h)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{h}{h+1}\right)\right)\\
&\underset{h\to 0^+}{=} (1+h)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(h(1+o(1))\right)\right)\\
&\underset{h\to 0^+}{=} (1+h)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(h+o(h)\right)\right)\\
&\underset{h\to 0^+}{=} (1+h)\left(\frac{\pi}{2}-h+o(h)\right)\\
&\underset{h\to 0^+}{=} \frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)h+o(h)
\end{aligned}$$

Rappel

On sait que, pour $x>0$, on a $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

De manière similaire, pour $h<0$

$$f(1+h) \underset{h\to 0^-}{=} -\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)h+o(h)$$

Ainsi $\lim\limits_{h\to 1^+} f(x)=\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\frac{\pi}{2}$, la fonction n'est donc pas prolongeable par continuité en 1.

Elle admet toutefois des limites finies à gauche et à droite ainsi que des demi-tangentes d'équations respectives

$$y=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(x-1) \qquad \text{pour } x\geqslant 1$$

$$y=-\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)(x-1) \qquad \text{pour } x\leqslant 1$$

— f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, et, pour $x\neq 1$ on a

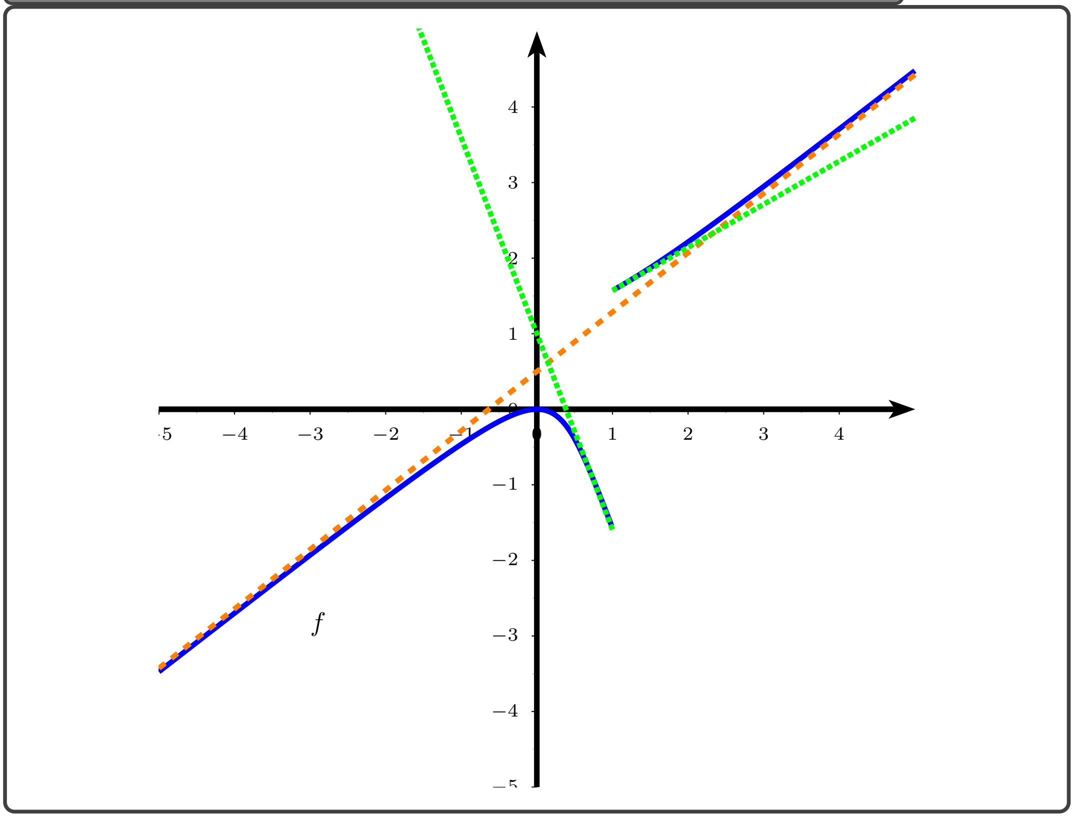
$$f'(x)=\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{x}{2x^2-2x+1}$$

$$f''(x)=2\frac{x-1}{(2x^2-2x+1)^2}$$

On en déduit le tableau de variations

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f''		$-$		$-$	0	$+$	
f'	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$			$-\frac{\pi}{2}-1 \;\Vert\; \frac{\pi}{2}-1$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2} \;\Vert\; \frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Figure .3 – Tracé de f, ses demi-tangentes en 1 et son asymptote en $\pm\infty$



Corrigé de l'exercice 11

1. D'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction exp en 0 (qui est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x - f_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

— Si $x > 0$ on a, pour tout $t \in]0, x[$, $(x-t)^n \mathrm{e}^t > 0$, ainsi, par stricte positivité de l'intégrale, le graphe de f_n est en dessous de celui de f sur $\mathbb{R}_+$.

— Si $x < 0$ on a, $e^x - f_n(x) = -\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_x^0 (x-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ et pour $t \in]0, x[$, $(x-t)^n\mathrm{e}^t > 0$ si n est pair et $(x-t)^n\mathrm{e}^t < 0$ si n est impair. On en déduit que, si n est impair le graphe de f_n est en dessous de celui de f sur $\mathbb{R}_-$ et, si n est pair, le graphe de f_n est au dessus de celui de f.

2. On remarque que $f_n' = f_{n-1}$ les variations de f_n vont ainsi être intimement liées au signe de f_{n-1}.

   On va prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante :

   $\mathcal{P}(n)$: « l'équation $f_{2n}(x) = 0$ n'admet aucune solution et $f_{2n+1}(x) = 0$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$ »

   Initialisation :

   $f_0(x) = 1$ et $f_1(x) = 1 + x$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité :

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie.

   On remarque que, pour $k \in \mathbb{N}$, f_k est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est f_{k-1}.

   Ainsi, la dérivée de f_{2n} est f_{2n-1}, qui est une fonction polynomiale de degré $2n-1$, de coefficient dominant $\dfrac{1}{(2n-1)!}$ et qui, par hypothèse de récurrence, s'annule en une unique valeur notée r_{2n-1}.

   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f_{2n-1}(x) = -\infty$ et f_{2n-1} est continue et ne s'annule pas sur $]-\infty, r_{2n-1}[$, elle y est donc strictement négative. De même $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{2n-1}(x) = +\infty$ et f_{2n-1} est continue et ne s'annule pas sur $]r_{2n-1}, +\infty[$, elle y est donc strictement positive.

   Ainsi, f_{2n} est strictement décroissante sur $]-\infty, r_{2n-1}[$ et strictement croissante sur $]r_{2n-1}, +\infty[$.

   Elle atteint donc un minimum en r_{2n-1} qui vaut

   $$f_{2n}(r_{2n-1}) = f_{2n-1}(r_{2n-1}) + \frac{r_{2n-1}^{2n}}{(2n)!} = 0 + \frac{r_{2n-1}^{2n}}{(2n)!} > 0$$

   Elle ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}$ et y reste strictement positive.

   f_{2n+1} admet pour dérivée f_{2n}, qui est strictement positive. Elle est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f_{2n+1}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{2n+1}(x) = +\infty$. f_{2n+1} réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

   On en déduit que l'équation $f_{2n+1}(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et $f_{2n}(x) = 0$ n'en admet aucune.

   Ce qui montre la propriété au rang n et achève la récurrence.

3. On pose $g_n = f_n - \lambda \exp$.

   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que g_n admet une unique racine réelle strictement positive.

   On pose $\mathcal{H}(n)$:« g_n admet une unique racine réelle strictement positive ».

   Initialisation :

   $g_0(x) = 1 - \lambda\exp(x)$ admet pour unique racine $-\ln(\lambda) > 0$. Donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

   Hérédité :

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{H}(n)$ vraie.

   g_{n+1} est dérivable, de dérivée g_n. g_n est continue et s'annule une unique fois sur $]0, +\infty[$ en x_n. De plus $g_n(0) = 1 - \lambda > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = -\infty$, donc g_n est strictement positive sur $]0, x_n[$ et strictement négative $]x_n, +\infty[$.

   Ainsi g_{n+1} est strictement croissante sur $]0, x_n[$. Comme $g_{n+1}(0) = 1 - \lambda > 0$, g_{n+1} est strictement positive sur $[0, x_n]$.

   De même g_{n+1} est strictement décroissante sur $]x_n, +\infty[$ et continue. On a $g_{n+1}(x_n) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_{n+1}(x) = -\infty$ donc d'après le théorème de la bijection continue, g_{n+1} réalise une bijection de $]x_n, +\infty[$ vers $]-\infty, g_{n+1}(x_n)[$, qui contient 0.

On en déduit que l'équation $g_{n+1}(x) = 0$ admet une unique solution dans $]x_n, +\infty[\subset]0, +\infty[$.

Ceci montre la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

On en déduit de plus que $x_{n+1} > x_n$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Le théorème de la limite monotone nous assure que :

— si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$

— sinon $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Supposons par l'absurde que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Par définition de x_n on a $f_n(x_n) = \lambda e^{x_n}$ et, par continuité de la fonction exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{x_n} = e^{\ell}$. Ainsi la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λe^{ℓ}.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leqslant \ell$

De plus, d'après l'égalité de Taylor avec reste intégral, pour $x \in [0, \ell]$ on a

$$|f_n(x) - e^x| = \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{e^{\ell}\ell^{n+1}}{(n+1)!}$$

On en déduit que $|f_n(x_n) - e^{x_n}| \leqslant \dfrac{e^{\ell}\ell^{n+1}}{(n+1)!}$.

Donc, par encadrement $(f_n(x_n))$ converge vers e^{ℓ}.

Par unicité de la limite on a alors $e^{\ell} = \lambda e^{\ell}$, ce qui est absurde car $\lambda > 0$ et $e^{\ell} \neq 0$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Corrigé de l'exercice 12

1. Soit F l'unique primitive de f qui s'annule en 0. f étant continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   Pour $y = 0$, on a $f(x)f(0) = 0$, donc f est nulle et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ou bien $f(0) = 0$.

   Si f est non nulle, alors il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(y_0) \neq 0$. D'où

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2f(y_0)}(F(x+y_0) - F(x-y_0))$$

   Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   Par définition, on a de plus

   $$0 = 2f(0)f(y) = F(y) - F(-y)$$

   Ainsi F est paire, f est alors impaire en tant que dérivée d'une fonction paire.
2. La relation est clairement vraie si f est nulle. On va donc supposer f non-nulle.

   f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc sa primitive F est de classe $\mathcal{C}^2$. La relation $f(x) = \dfrac{1}{2f(y_0)}(F(x+y_0) - F(x-y_0))$ nous assure alors que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

   > **Classe**
   > En itérant ce procédé on peut en fait montrer que f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.

   En dérivant la relation initiale par rapport à x (à y fixé donc) on obtient

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad 2f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y)$$

   D'où en re-dérivant par rapport à x

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad 2f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$$

   En dérivant maintenant la relation initiale par rapport à y (à x fixé donc) on obtient

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad 2f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$$

D'où en re-dérivant par rapport à y

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad 2f''(x)f(y)=f'(x+y)-f'(x-y)$$

Ainsi

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad f''(x)f(y)=f(x)f''(y).$$

Puisque f est non-nulle il existe $y_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(y_0)\neq 0$, d'où

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f''(x)=\frac{f''(y_0)}{f(y_0)}f(x)$$

On se trouve face à une équation différentielle linéaire homogène du second degré à coefficients constants que l'on sait résoudre. Notons $K=\dfrac{f''(y_0)}{f(y_0)}$ de sorte que $f''=K\times f$.

- Si $K=0$ alors il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f:x\mapsto Ax+B$, puisque $f(0)=0$ on a $B=0$ et donc f est de la forme $x\mapsto Ax$ avec $A\in\mathbb{R}$.
- Si $K>0$ alors il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f:x\mapsto A\exp(\sqrt{K}x)+B\exp(-\sqrt{K}x)$, puisque $f(0)=0$ on a $A=-B$ et donc f est de la forme $x\mapsto A\,\mathrm{sh}(\sqrt{K}x)$ avec $A\in\mathbb{R}$.
- Si $K<0$ alors il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f:x\mapsto A\sin(\sqrt{-K}x)+B\cos(\sqrt{-K}x)$, puisque $f(0)=0$ on a $B=0$ et donc f est de la forme $x\mapsto A\sin(\sqrt{-K}x)$ avec $A\in\mathbb{R}$.

3. Réciproquement,

- si, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=A\,\mathrm{sh}(\sqrt{K}x)$ avec $A\in\mathbb{R}$, alors

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{A}{\sqrt{K}}(\mathrm{ch}(\sqrt{K}(x+y))-\mathrm{ch}(\sqrt{K}(x-y)))=2\frac{A}{\sqrt{K}}\,\mathrm{sh}(\sqrt{K}(x))\,\mathrm{sh}(\sqrt{K}(y))$$

Donc f est solution si et seulement si $A=\dfrac{1}{\sqrt{K}}$.

- si, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=A\sin(\sqrt{-K}x)$ avec $A\in\mathbb{R}$, alors

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{A}{\sqrt{-K}}(\cos(\sqrt{-K}(x+y))-\cos(\sqrt{-K}(x-y)))=2\frac{A}{\sqrt{-K}}\sin(\sqrt{-K}(x))\sin(\sqrt{-K}(y))$$

Donc f est solution si et seulement si $A=\dfrac{1}{\sqrt{-K}}$.

- si, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=Ax$ avec $A\in\mathbb{R}$, alors

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{A}{2}((x+y)^2-(x-y)^2)=2Axy$$

Ainsi f est solution si et seulement si $A=1$.

Corrigé de l'exercice 13

On va procéder par Analyse-Synthèse.

Analyse :

On suppose que f est une solution.

f étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y est continue, Ainsi, puisque $f':y\mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ alors f' est continue par composition. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit par un argugment similaire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On peut donc dériver la relation, ce qui donne

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad f''(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}f(x)$$

f est donc solution de l'équation différentielle $y'' = -\frac{1}{x^2}y$.

Pour résoudre cette équation différentielle, on définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(e^t)$, $y(x) = z(\ln(x))$.

On a donc

$$\forall x > 0, \qquad y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln(x)), \qquad y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2}z''(\ln(x))$$

Ainsi y est solution de $y'' = -\frac{1}{x^2}y$ si et seulement si $z'' - z' + z = 0$.

Or z est solution de $z'' - z' + z = 0$ si et seulement si il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t > 0, \qquad z(t) = \exp\left(\frac{t}{2}\right)\left(A\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + B\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)$$

Ainsi, si f est solution, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \sqrt{x}\left(A\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\right) + B\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\right)\right)$$

<u>Synthèse :</u>

Réciproquement, si pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \sqrt{x}\left(a\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\right) + b\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\right)\right)$$

Alors, pour $x > 0$,

$$f'(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-3a\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\right) - a\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\right)\sqrt{3} + b\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\right)\sqrt{3}\right)$$

Ainsi f est solution si et seulement si $b = a\sqrt{3}$.

Finalement, les solutions sont les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f : x \mapsto a\sqrt{x}\left(\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\right)\right)$$

Corrigé de l'exercice 14

1. La fonction $5 + \sin$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et prend des valeurs dans $[4, 6]$, la fonction $\ln$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[4, 6]$. Ainsi, par composition la fonction $x \mapsto \ln(5 + \sin(x))$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. La fonction $x \mapsto x$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, donc, par produit f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

   Pour $x \in I$ on a

   $$f'(x) = \ln(5 + \sin(x)) + \frac{x\cos(x)}{5 + \sin(x)}$$

2. Pour $x \in I$ on a $\ln(4) \leqslant g(x) \leqslant \ln(6)$ et $\frac{1}{6} \leqslant h(x) \leqslant \frac{1}{4}$. Par ailleurs, pour $x \in I$ on a $|x| < \frac{\pi}{2}$ et $|\cos(x)| < 1$. Ainsi $|x\cos(x) < -\frac{\pi}{2}$, i.e. $-\frac{\pi}{2} < x\cos(x) < \frac{\pi}{2}$.

   On en déduit que, pour $x \in I$,

   $$\ln(2) - \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \ln(6) + \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4}$$

   Or $\ln(2) - \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4} \simeq 0.3$, ainsi f' est positive sur I.

   f est donc strictement croissante sur I.

Formulation

Telle qu'elle semble avoir été posée aux concours la formulation de cette question est plutôt vague, on ne sait pas bien quels encadrements sont attendus.

3. f est continue et strictement croissante sur I, d'après le théorème de la bijection continue c'est donc une bijection de I vers $J = f(I) = \left[-\frac{\pi\ln(5)}{2}, \frac{\pi\ln(5)}{2}\right]$
4. Puisque le D.L. de $\ln(1+\sin(x))$ va être multiplié par x on a seulement besoin d'aller à l'ordre 3 dans ce D.L. pour obtenir un ordre 4 au final. On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\ln(5+\sin(x)) \\
&\underset{x\to 0}{=} x\ln\left(5 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x\ln(5) + x\ln\left(1 + \frac{x}{5} - \frac{x^3}{30} + o(x^3)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x\ln(5) + x\left(\left(\frac{x}{5} - \frac{x^3}{30} + o(x^3)\right) - \frac{\left(\frac{x}{5} - \frac{x^3}{30} + o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{5} - \frac{x^3}{30} + o(x^3)\right)^3}{3}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x\ln(5) + x\left(\frac{x}{5} - \frac{x^3}{30} - \frac{x^2}{50} + \frac{x^3}{375} + o(x^3)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x\ln(5) + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{50} + \left(\frac{1}{375} - \frac{1}{30}\right)x^4 + o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} x\ln(5) + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{50} - \frac{23x^4}{750} + o(x^4)
\end{aligned}$$

On en déduit que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f en $(0, f(0))$ est la droite d'équation $y = x\ln(5)$ et, comme $\frac{x^2}{5} \geqslant 0$, que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de sa tangente en $(0, f(0))$.

Corrigé de l'exercice 15

1. On va étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. f est polynomiale et donc dérivable.
Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = 1 + 2x - 9x^2 = -9\left(x - \frac{1+\sqrt{10}}{9}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{10}}{9}\right)$$

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{10}}{9}$		$\frac{1+\sqrt{10}}{9}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{29-20\sqrt{10}}{243}$	$\nearrow$	$\frac{29+20\sqrt{10}}{243}$	$\searrow$	$-\infty$

f est alors injective sur $I = \left[\frac{1-\sqrt{10}}{9}, \frac{1+\sqrt{10}}{9}\right]$ qui est un intervalle contenant 0. L'étude des variations et la continuité de f nous assure que f n'est pas injective sur tout intervalle strictement plus grand.

2. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas sur I, ainsi sa bijection réciproque g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $J = f(I) = \left[\frac{29-20\sqrt{10}}{243}, \frac{29+20\sqrt{10}}{243}\right]$. Puisque $0 \in J$, la formule de Taylor-Young nous assure que g admet un D.L. à tout ordre en 0.

Notons $g(x) \underset{x\to 0}{=} a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + o(x^4)$ son développement limité.

Par composition de D.L. on a alors

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\underset{x\to 0}{=} a + b(x + x^2 - 3x^3) + c(x + x^2 - 3x^3)^2 + d(x + x^2 - 3x^3)^3 + e(x + x^2 - 3x^3)^4 + o(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} a + bx + bx^2 - 3bx^3 + cx^2 + 2cx^3 - 6cx^4 + cx^4 + dx^3 + 3dx^4 + ex^4 + o(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} a + bx + (b + c)x^2 + (-3b + 2c + d)x^3 + (-5c + 3d + e)x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

On sait que, pour tout $x \in I$, $g(f(x)) = x$, en particulier $g(f(x)) \underset{x\to 0}{=} x + o(x^4)$

Ainsi, par unicité du développement limité de $g \circ f$ en 0, on a

$$\begin{cases} a & = 0 \\ b & = 1 \\ b + c & = 0 \\ -3b + 2c + d & = 0 \\ -5c + 3d + e & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 0 \\ b & = 1 \\ c & = -1 \\ d & = 5 \\ e & = -20 \end{cases}$$

On a donc

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + 5x^3 - 20x^4 + o(x^4)$$

Corrigé de l'exercice 16

Soit P un tel polynôme que l'on suppose non constant. Comme P n'est pas constant alors il admet au moins une racine complexe que l'on note α.

On a alors $P(\alpha^2 = P(\alpha)P(\alpha + 1) = 0$, ainsi α^2 est aussi une racine de P.

En itérant ce procédé on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est une racine de P.

Si $|\alpha| \notin \{0, 1\}$ alors les complexes $(\alpha^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont de module deux-à-deux distincts et sont donc deux-à-deux distincts. P admettrait alors une infinité de racines donc serait nul ce qui n'est pas le cas.

On a donc $\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$.

On voit de plus que $P((\alpha - 1)^2)P(\alpha - 1)P(\alpha) = 0$ ainsi $(\alpha - 1)^2$ est également une racine de P, d'où $|(\alpha - 1)^2| = 1$ ou bien $(\alpha - 1)^2 = 0$

On a donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ ou bien $|\alpha| = 1$ et $|\alpha - 1| = 1$

Si $|\alpha| = 1$ et $|\alpha - 1| = 1$ alors, dans le plan complexe α se trouve à l'intersection du cercle de centre 0 et de rayon 1 et du cercle de centre 1 et de rayon 1. Ainsi $\alpha \in \{-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\}$.

Si $\alpha = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ alors $\alpha^2 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. Or on sait que α^2 doit également être une racine de P et donc $\alpha^2 \in \{0, 1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}}\}$. Ce n'est pas le cas et donc $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ n'est pas une racine possible de P. De manière similaire $\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$ n'est pas non plus une racine possible de P.

Les seules racines possibles de P étant 0 et 1 on en déduit que P peut s'écrire sous la forme $P = KX^a(X - 1)^b$ où $K \in \mathbb{R}$, et $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

On a alors $P(X^2) = KX^{2a}(X^2-1)^b = KX^{2a}(X-1)^b(X+1)^b$ et $P(X)P(X+1) = K^2X^{a+b}(X-1)^b(X + 1)^a$. Ainsi $a = b$ et $K = K^2$.

Finalement, si P vérifie $P(X^2) = P(X) \times P(X + 1)$ alors $P = 0$ ou il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P = X^n(X - 1)^n$.

Il est aisé de voir que ces polynômes vérifient bien $P(X^2) = P(X) \times P(X + 1)$.

Finalement P vérifie $P(X^2) = P(X) \times P(X + 1)$ si et seulement si $P = 0$ ou il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P = X^n(X - 1)^n$.

Corrigé de l'exercice 17

1. On a $(X^n+1)(X^n-1) = (X^n)^2 - 1 = X^{2n-} - 1$ et $(X^2)^n - 1 = X^{2n} - 1$, ainsi $X^n - 1$ vérifie bien la relation (E).
2. On a $\deg((X^n+1)P(X)) = n + \deg(P)$ et $\deg(P(X^2)) = 2\deg(P)$, d'où $2\deg(P) = \deg(P) + n$ et donc $\deg(P) = n$.
3. On a $\omega^n = -1$ ainsi $\omega^{n+1} = -\omega$. De même $\omega^{2n+n+1} = -\omega$.

   Puisque n est impair on peut écrire $n = 2p+1$, on a donc

   $$-\omega = \omega^{2p+2} = \left(\omega^{p+1}\right)^2 \qquad \text{et } -\omega = \omega^{2n+2p+2} = \left[\omega^{n+p+1}\right)^2$$

   En évaluant la relation (E) en ω^{p+1} on obtient

   $$\left(\left(\omega^{p+1}\right)^n + 1\right) P\left(\omega^{p+1}\right) = P\left(\left(\omega^{p+1}\right)^2\right)$$

   C'est-à-dire

   $$P(-\omega) = \left(\omega^{n(p+1)} + 1\right) P\left(\omega^{p+1}\right) = \left((-1)^{p+1} + 1\right) P\left(\omega^{p+1}\right)$$

   Si p est pair on en déduit alors que $P(-\omega) = 0$.

   Si par contre p est impair on va alors évaluer (E) en ω^{n+p+1} ce qui nous donne

   $$P(-\omega) = \left(\omega^{n(n+p+1)} + 1\right) P\left(\omega^{p+1}\right) = \left((-1)^{n+p+1} + 1\right) P\left(\omega^{p+1}\right)$$

   Puisque n et p sont impairs alors $n+p+1$ est impair, ce qui nous donne bien $P(-\omega) = 0$.
4. Les racines n-ièmes de -1 sont les complexes de la forme $\exp\left(i\dfrac{\pi + 2k\pi}{n}\right)$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$, il y en a n distinctes. D'après la question précédente, les complexes $-\exp\left(i\dfrac{\pi+2k\pi}{n}\right) = \exp\left(i\dfrac{(n+1)\pi + 2k\pi}{n}\right)$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont des racines de P

   Puisque $n = 2p+1$ on a alors

   $$\exp\left(i\frac{(n+1)\pi + 2k\pi}{n}\right) = \exp\left(i\frac{2(k+p+1)\pi}{n}\right)$$

   Ainsi les complexes $\exp\left(i\dfrac{\pi+2k\pi}{n}\right)$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont exactement les racines n-ièmes de l'unité.

   P est alors un polynôme de degré n qui admet comme racines toute les racines n-ièmes de l'unité. P peut donc s'écrire $K(X^n - 1)$ où $K \in \mathbb{R}$.

   Réciproquement on vérifie aisément que tous les polynômes de cette forme sont solutions de (E).

   Finalement l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des polynômes $K(X^n - 1)$ où $K \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 18

1. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonction continue sur $\mathbb{R}^*$.

   La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est dérivable en 0 et sa dérivée y vaut -1. En d'autres termes on a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}{-0}}{t - 0} = -1$

   D'où $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1 = f(0)$. f est donc continue en 0.

   Pour $t \geqslant 0$, on a $e^{-t} < 1$ et $1 - e^{-t} > 0$. Ainsi,

   $$\forall t > 0, \qquad f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t} > 0$$

Pour $t<0$, on a $e^{-t}>1$ et $1-e^{-t}<0$. Ainsi,

$$\forall t<0, \qquad f(t)=\frac{1-e^{-t}}{t}>0$$

Enfin $f(0)=1>0$. finalement f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $t\neq 0$ on a

$$f'(t)=\frac{te^{-t}-(1-e^{-t})}{t^2}=\frac{(t+1)e^{-t}-1}{t^2}$$

Posons $h:t\mapsto (t+1)e^{-t}-1$. h est alors dérivable et pour $t\in\mathbb{R}$ on a

$$h'(t)=e^{-t}-(t+1)e^{-t}=-te^{-t}$$

Ainsi $h'(t)>0$ si et seulement si $t<0$.

On en déduit le tableau de variations de h

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1

Ainsi h ne prend que des valeurs négatives. Par conséquent f' ne prend que des valeurs négatives, f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Pour connaître la tangente au graphe de f en 0, on détermine le développement limité de f en 0 à l'ordre 1 .

$$f(t)=\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\underset{t\to 0}{=}\frac{1-\left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)}{t}\underset{t\to 0}{=}1-\frac{t}{2}+o(t)$$

Ainsi la tangente au graphe de f en 0 a pour équation $y=1-\dfrac{x}{2}$.

4. Déterminons le comportement de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$,

$$f(t)\underset{-\infty}{\sim}-\frac{e^{-t}}{t}\underset{t\to-\infty}{\longrightarrow}+\infty \quad \text{et} \quad f(t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

On obtient ensuite la courbe représentative de f :

Figure .4 – Tracé de la courbe de f